

4. Ein Vergleich der Messungen von MAXWELL, HOWARD und GARMIRE<sup>21</sup>, BOISCHOT, LEE und WARWICK<sup>22</sup>, WILD und SHERIDAN<sup>23</sup>, MALVILLE<sup>13</sup> und HUGHES und HARKNESS<sup>9</sup> zeigt, daß die Werte für  $D_{\nu c}$  selbst, vor allen Dingen für kleinere Frequenzen, noch ziemlich unsicher sind.

Aus diesen Gründen bleibt eine Bestimmung der Zeitabhängigkeit der Dicke  $d$  der Wolke unsicher, und einer Änderung von  $d$  um den Faktor 3 über

2 Sonnenradien<sup>9</sup> kann daher keine allzu große Bedeutung zugemessen werden. Zur Zeit können also keine Aussagen über  $\vartheta$  gemacht werden.

Herrn Prof. Dr. E. RICHTER danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele Hinweise und Ratschläge sehr herzlich. Herrn Prof. Dr. A. UNSÖLD bin ich für die Bereitstellung eines Arbeitsplatzes und für sein freundliches, förderndes Interesse zu Dank verpflichtet.

<sup>21</sup> A. MAXWELL, W. E. HOWARD u. G. GARMIRE, Sci. Rep. No. 14 [1959], AF 19 (604) — 1394, Astia.

<sup>22</sup> A. BOISCHOT, R. H. LEE u. J. W. WARWICK, Astrophys. J. **131**, 61 [1960].

<sup>23</sup> J. P. WILD u. K. V. SHERIDAN, J. Phys. Soc. Japan **17**, Suppl. A-II 223 [1962].

## Untersuchung über die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in einem zylindrischen Plasma mit Magnetfeld \*, \*\*

KARL WEINHARDT

Institut für Plasmaphysik GmbH, Garching bei München

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1592—1599 [1967]; eingegangen am 5. Juni 1967)

Propagation of circularly symmetric electromagnetic modes parallel to the magnetic field lines in the positive column of an argon hollow-cathode arc discharge has been studied. The applied frequency ( $3 \cdot 10^9$  cps) was less than both the electron gyrofrequency and the electron plasma frequency. These measurements were compared with dispersion relations for circularly symmetric modes calculated by using the complete MAXWELL equations, the  $\epsilon$ -tensor for a cold collisionless plasma, and suitable boundary conditions. It could be shown that the mode which was excited was most likely determined by the boundary of the coupling system and not by the boundary of the whole vessel as originally expected.

Ebene elektromagnetische Wellen, die sich in einem homogenen Plasma parallel zur Richtung eines homogenen Magnetfeldes ausbreiten, mit Frequenzen unterhalb der Elektronenplasma- und Elektronengyrofrequenz, sollten sich außerordentlich gut für diagnostische Zwecke eignen. Denn die Ausbreitung dieser sog. whistler-mode ist beschränkt auf einen schmalen Kegel um die Richtung des Magnetfeldes, wobei ihr Brechungsindex immer  $> 1$  und in der Nähe der Gyroresonanz stark dispersiv ist<sup>1</sup>. Für die Anregung und den Nachweis dieser Wellen bieten sich, besonders in elektrodenlosen Entladungen, kurze Stifantennen als besonders einfach an. WIEDER<sup>2</sup> fand jedoch an ZETA, daß die Auswertung

solcher Messungen praktisch unmöglich gemacht wurde durch Wellen, die offenbar unter Mitwirkung des Plasmarandes zustande kamen, obwohl die Plasmaausdehnungen groß gegen die Wellenlänge waren. Aber auch unter wesentlich einfacheren Versuchsbedingungen, nämlich bei Anwendung dieser Methode in der positiven Säule eines Argon-Hohlkathodenbogens, konnten wir unsere Beobachtungen nur qualitativ mit der Theorie ebener Wellen erklären. Wieder mußte angenommen werden, daß die Stifantennen in unkontrollierbarer Weise mehrere Wellentypen anregten, die sich unter Mitwirkung des Plasmarandes ausbreiteten und interferierten<sup>3</sup>. Es lag deshalb nahe, unser Experiment so abzu-

\* Auszug aus einer von der Fakultät für Allgemeine Wissenschaft der Technischen Hochschule München genehmigten Dissertation. Tag der Promotion: 27. 7. 1966.

\*\* Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

<sup>1</sup> D. W. MAHAFFEY, Phys. Rev. **129**, 1481 [1963]. — A. N. DILLIS u. J. M. WEAVER, Proc. Phys. Soc. London **83**, 473 [1964].

<sup>2</sup> B. WIEDER, NBS-Report 7237 [1962].

<sup>3</sup> K. WEINHARDT, Bericht IPP 2/59.



ändern, daß der endlichen Ausdehnung und der Rotationssymmetrie von Anfang an Rechnung getragen wird und zu versuchen, rotationssymmetrische Wellen allein anzuregen. Durch die Wahl eines geeigneten Ankoppelsystems wurde in der Tat nur eine einzige Welle angeregt, deren Wellenlänge bzw. Phasengeschwindigkeit sauber bestimmt werden konnte. Diese Messungen wurden mit Dispersionsbeziehungen verglichen, die aus den vollständigen MAXWELL-Gleichungen berechnet wurden mit Hilfe des  $\epsilon$ -Tensors für ein kaltes, stoßfreies Plasma und geeigneter Randbedingungen. Dabei zeigte es sich, daß die angeregten Wellen höchstwahrscheinlich durch die Randbedingungen am Ankoppelsystem bestimmt wurden und nicht durch den Rand des gesamten Entladungsgefäßes, wie ursprünglich erwartet worden war.

## 1. Die Entladungsapparatur

Für die Messungen stand der in Abb. 1 schematisch dargestellte Hohlkathodenbogen zur Verfügung. Es handelt sich um einen stationären Gasbogen, der aus einer hohlen zylindrischen Tantal Kathode heraus entlang einem axialen Magnetfeld zu einer ebenen Wolframkathode brennt. Die aufrallenden Ionen erhitzen die Kathode auf 2000 bis 3000 °C. Durch ihr mit Plasma gefülltes Innere strömt von außen Argon ein, das dort nahezu vollständig ionisiert wird<sup>4, 5</sup>. Das durch Rekombination entstehende Neutralgas wird mit zwei kräftigen Diffusionspumpen abgesaugt, so daß der vom Magnetfeld geführte und stabilisierte Bogen nur von einer dünnen Neutralgasatmosphäre umgeben ist.

Die Entladung erfolgt innerhalb eines wassergekühlten Doppelwandgefäßes aus V2A-Stahl mit einem inneren Durchmesser von 22 cm, das von 24 wassergekühlten Spulen umgeben ist, die ein Magnetfeld von maximal 4500 G stationär erzeugen. In der Mitte des Gefäßes befinden sich vier um 90° versetzte Beobachtungsstutzen von 10 cm innerem Durchmesser. Als

Kathoden werden kreisrunde Tantalrohre von 1 mm Wandstärke und einem inneren Durchmesser zwischen 3 und 30 mm verwendet. Um eine möglichst hohe Ionisation zu erzielen, ist es zweckmäßig, die Länge 6 bis 8mal größer als den Durchmesser zu wählen. Der Gasfluß beträgt zwischen 0,4 und 6 Ncm<sup>3</sup>/sec.

Die Zündung erfolgt mit Hilfe eines HF-Zündgerätes, das nach dem Stoßkreisprinzip arbeitet und das in rascher Folge stark gedämpfte 1,5 MHz-Schwingungen mit einer Spitzenspannung von 4 kV erzeugt. Die Impulse werden über eine HF-Drossel eingespeist, die zwischen Kathode und Stromversorgung eingebaut ist und die gleichzeitig die Induktivität des Stoßkreises bildet (Anode und Metallgefäß liegen auf Erdpotential). Bei geeignetem Gasfluß (1–2 Ncm<sup>3</sup>/sec) entsteht eine schwach leuchtende HF-Entladung. Wird die Speisenspannung (150 V) dazu geschaltet, heizt sich die Kathode rasch auf, die angelegte Spannung sinkt auf die Brennspannung, und es bildet sich eine dichte, hell leuchtende Plasmasäule, die vom Magnetfeld zusammengehalten wird. Dieser Bogenkern ist von einer schwach leuchtenden Aureole umgeben, die aus dünnem Plasma besteht, das im wesentlichen aus dem Bogenkern quer zum Magnetfeld heraus diffundiert sein dürfte.

Der Bogen brennt bis zu einem minimalen Bogenstrom von 6 A stabil; maximal wurde mit 400 A gearbeitet. Dabei stellen sich je nach Bogenlänge, Gasfluß und Magnetfeldstärke Bogen Spannungen zwischen 30 und 100 V ein. Ein großer Teil der Spannung dürfte als Kathodenfall in einer dünnen Schicht im Inneren der Kathode lokalisiert sein. Aus dem Anstieg der Bogen Spannung bei einer kleinen Verlängerung des Bogens werden für die elektrische Feldstärke Werte zwischen 0,1 und 0,5 V/cm abgeschätzt.

Der Durchmesser des Bogenkernes ist praktisch gleich dem der Kathode. Er nimmt mit wachsender Entfernung von dieser leicht zu. Dabei liegen die Dichteänderungen innerhalb der Meßgenauigkeit. Außerhalb des Kernes nimmt die Dichte nahezu exponentiell mit dem Radius ab. Bei einem Bogenstrom von 100 A, einem Gasfluß von 1,25 Ncm<sup>3</sup>/sec und einem Magnetfeld von 4000 G beträgt die Elektronendichte ca.  $3 \cdot 10^{14}/\text{cm}^3$  und der Neutralgasdruck im Beobachtungsraum rd.  $10^{-4}$  Torr. (Bei gleichem Gasfluß beträgt der

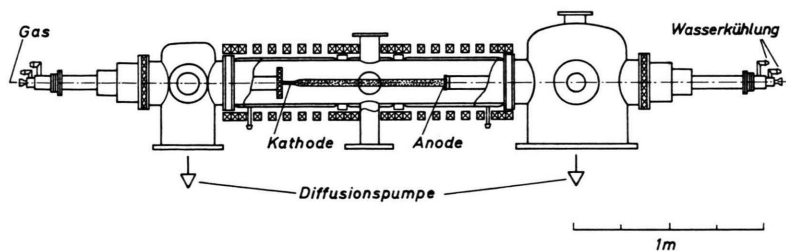


Abb. 1. Entladungsgefäß.

<sup>4</sup> L. M. LIDSKY, S. D. ROTHLEDER, D. J. ROSE u. S. YOSHIKAWA, J. Appl. Phys. **38**, 2490 [1962].

<sup>5</sup> R. A. GIBBONS u. R. J. MACKIN, JR., Proc. 5th. Intern. Conf. Ionization Phenomena in Gases, Munich 1961, Vol. II, p. 1768.

Neutralgasdruck ohne Bogen  $\sim 1,3 \cdot 10^{-3}$  Torr.) An ähnlichen Bögen und bei vergleichbaren Parametern<sup>4,5</sup> werden Elektronentemperaturen zwischen 1 und 10 eV und Ionentemperaturen der gleichen Größenordnung gemessen.

## 2. Messungen mit rotationssymmetrischer Ankopplung

Diesem Experiment liegt versuchsweise die Annahme zugrunde, daß sich der Bogen in brauchbarer Näherung beschreiben läßt als verlustfreier homogener Plasmazylinder, umgeben von Vakuum und konzentrisch eingeschlossen von einer zylindrischen Metallwand unendlicher Leitfähigkeit, so daß sich eine darin angeregte elektromagnetische Welle gewissermaßen in und an einem anisotropen dielektrischen Draht ausbreitet. Solch ein Wellenleiterproblem erlaubt ganz allgemein die Ausbreitung sehr vieler Wellentypen unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit, zwischen denen durch geeignete Anregungs- und Nachweisbedingungen ausgewählt werden muß. Da wir uns auf rotationssymmetrische Wellen beschränken wollten, wurde versucht, bei einer festen axialen Position die elektrische Feldstärke auf einem festen Radius so vorzugeben, daß sie vom Winkel  $\varphi$  nicht abhängt.

Hierzu wurde der in Abb. 2 dargestellte „Ringkoppler“ konstruiert. Er besteht aus einem Metallring, der den Bogenkern konzentrisch umfaßt und

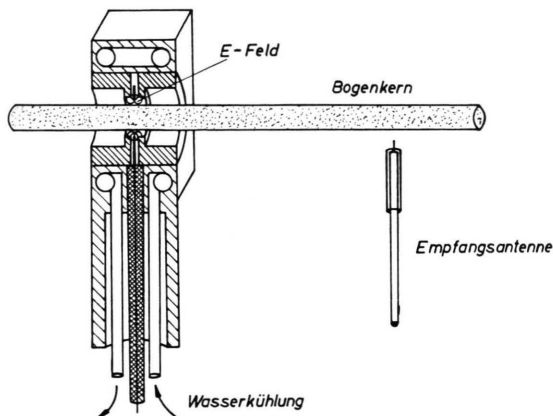


Abb. 2. Ringkoppler.

der mit der Seele eines Koaxialkabels verbunden ist. Der Mantel des Kabels ist mit einem Metallgehäuse verbunden, in dem der Ring isoliert so eingebaut ist, daß nur ein schwaches Streufeld aus- und in den Bogenkern eintritt. Dieser „Koppelspalt“ kann

zwischen 0,5 und 6 mm variiert werden. Seine Größe ist ein Maß für die kleinste anregbare Wellenlänge.

Damit die vom Koppler erzeugte Feldstärke vom Winkel  $\varphi$  unabhängig ist, muß der Umfang des Kopplers klein gegen die Vakuumwellenlänge der anregenden Schwingung sein. Der Bogenkerndurchmesser sollte also möglichst klein gewählt werden. Andererseits sollte er aber groß sein gegen den Gyroradius der Elektronen (rd. 0,1 mm), damit der Bogenkern als homogener Plasmazylinder mit scharfem Rand betrachtet werden kann. Als Kompromiß wurde der Kathodendurchmesser, durch den ja der Bogendurchmesser bestimmt ist, zu 5,5 mm gewählt, ein Wert, bei dem der Bogen in einem ausreichend großen Parameterbereich stabil brennt. Da der Koppler den Bogen möglichst eng umschließen soll, muß er gekühlt werden. Dadurch sind im wesentlichen Form und Abmessung des Kopplergehäuses bestimmt. Es wird sich später zeigen, daß überraschenderweise dieser unwesentliche Umstand den Wellentyp bestimmt, der auf dem Bogen angeregt wird. — Der Ringkoppler wurde direkt aus einem unmodulierten 3-GHz-Generator gespeist.

Es wäre konsequent und zweckmäßig, ein völlig gleichartiges Empfangssystem zu verwenden. Aber leider ließ sich dies im vorgegebenen Beobachtungsstutzen nicht verwirklichen. Deshalb wurde eine Stiftenantenne benutzt, die in einem Abstand von ca. 15 mm von der Bogenseele parallel zu dieser von Hand verschoben werden konnte. — Der Abstand war so gewählt, daß die Antenne gerade nicht mehr thermisch beschädigt wurde. — Sie war an einen phasenempfindlichen Empfänger angeschlossen, der es gestattete, die Amplitude und die Phase des empfangenen Signals relativ zum Sender auf einem Polarszillographen direkt abzulesen<sup>3</sup>. Auf diese Weise konnten durch axiale Verschiebung der Stiftenantenne die Phasen- und Amplitudenänderungen der angeregten Welle über eine Strecke von 3,6 cm direkt verfolgt werden. Dabei ergab sich folgendes Bild.

Mit wachsendem Abstand vom Koppler nimmt die Amplitude leicht ab, und die Signale werden unruhiger und „verschwommener“. Der Phasenverlauf ist innerhalb der Meßgenauigkeit linear. Abweichungen von diesem Verhalten zeigen sich nur in unmittelbarer Nähe der Gyroresonanz. Dort erwecken die Meßkurven den Eindruck, als ob mehrere Wellen interferierten. Diese Erscheinung setzt bei einem um so größeren Magnetfeld ein, je kleiner der Koppel-

spalt und die Elektronendichte ist. — Abgesehen von diesen Ausnahmen ist die Ausbreitungskonstante und damit die Phasengeschwindigkeit der angeregten Welle bei allen Parametern gut definiert. Sie ist auch unabhängig vom Abstand von der Bogenseele, wie durch Stichproben festgestellt wurde, bei denen die Empfangsantenne mit einem Hebelmechanismus durch den heißen Bogenkern hindurch geschlagen wurde<sup>3</sup>. Deshalb dürfte im wesentlichen immer nur eine Welle angeregt sein. Die Parameterabhängigkeit der gemessenen Ausbreitungskonstanten ist in Abb. 5 (gestrichelte Kurven) dargestellt.

Die dabei angegebenen Elektronendichten beziehen sich auf den Bogenkern. Unterhalb von  $5 \cdot 10^{13}/\text{cm}^3$  wurden sie durch Transmissionsmessungen mit 4-mm-Mikrowellen ermittelt. Parallel zu diesen Messungen wurden in 25 mm Abstand von der Bogenseele Sondenmessungen ausgeführt, die nach BOHM<sup>6</sup> ausgewertet wurden. Unter der Annahme, daß die Elektronendichte im Kern und in der Aureole etwa in der gleichen Weise vom Bogenstrom und vom Gasfluß abhängen, wurde oberhalb von  $5 \cdot 10^{13}/\text{cm}^3$  die Elektronendichte im Bogenkern nach den Sondenmessungen extrapoliert.

### 3. Die Dispersionsbeziehung eines begrenzten rotationssymmetrischen Plasmas

In diesem Abschnitt wird die Ableitung der Dispersionsbeziehung für rotationsymmetrische Wellen skizziert, die sich in und an einem unendlich langen, homogenen und verlustlosen Plasmazylinder ausbreiten, der sich in einem homogenen axialen Magnetfeld befindet, von Vakuum umgeben und von einer Metallwand unendlicher Leitfähigkeit konzentrisch eingeschlossen ist. Dabei wird das Plasma als Dielektrikum aufgefaßt, das — da das Magnetfeld eine Richtung auszeichnet — anisotrop ist und deshalb durch einen Tensor charakterisiert wird. Wird die Richtung des Magnetfeldes zur  $z$ -Richtung eines orthogonalen Koordinatensystems gewählt, dann folgt für den  $\varepsilon$ -Tensor

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -i\varepsilon_2 & 0 \\ i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1 - \omega_p^2 / (\omega^2 - \omega_g^2), \\ \varepsilon_2 &= \omega_p^2 \cdot \omega_g / \omega (\omega^2 - \omega_g^2), \\ \varepsilon_3 &= 1 - \omega_p^2 / \omega^2, \end{aligned}$$

wobei  $\omega_p = q_0 \sqrt{n_e / (m_e \varepsilon_0)}$  die Elektronenplasmafrequenz und  $\omega_g = q_0 B_0 / m_e$  die Elektronengyrofrequenz ist<sup>7</sup>. Es werden nun Lösungen der MAXWELL-Gleichungen gesucht, die in der Form  $\exp(i\omega t - ikz)$  von Zeit und  $z$ -Richtung abhängen und die die in der Elektrodynamik üblichen Randbedingungen erfüllen, d. h. bei denen die Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  stetig durch die Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum geht und deren Tangentialkomponente von  $\mathbf{E}$  in der Metallwand verschwindet. Dabei wird  $\omega < \omega_p$ ,  $\omega < \omega_g$  und  $k$  als reell vorausgesetzt. Wird nun in der zur  $z$ -Achse transversalen Ebene ein orthogonales Koordinatensystem eingeführt, und werden die Elemente des  $\varepsilon$ -Tensors im Raum als stückweise konstant vorausgesetzt, dann läßt sich aus den MAXWELL-Gleichungen ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \nabla_t^2 B_z + A E_z + B B_z &= 0, \\ \nabla_t^2 E_z + C B_z + D E_z &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

für die  $z$ -Komponenten allein herleiten<sup>2, 3, 8</sup>. Es bedeutet  $\nabla_t$  den transversalen Teil des Nablaoperators und

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon_3 (\varepsilon_1 - N^2) / \varepsilon_1, \\ B &= i N \varepsilon_2 / \varepsilon_1, \\ C &= (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) / \varepsilon_1 - N^2, \\ D &= -i N \varepsilon_2 \varepsilon_3 / \varepsilon_1, \end{aligned}$$

wobei  $N$  die Ausbreitungskonstante  $k/k_0$  ist ( $k_0$  = Vakuumwellenzahl).

Die Gleichungen können zusammengefaßt werden zu einer Differentialgleichung 4. Ordnung

$$(\nabla_t^2 + S_1^2)(\nabla_t^2 + S_2^2) \Psi = 0, \quad (3)$$

die für jede der beiden  $z$ -Komponenten allein erfüllt sein muß. Dabei bedeutet

$$\begin{aligned} S_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} (A + C) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (A + C)^2 - (AC - BD)} \\ &= u \pm \sqrt{u^2 - v}. \end{aligned} \quad (4)$$

Solange also  $S_1 \neq S_2$  ist, ergeben sich aus

$$(\nabla_t^2 + S_{1,2}^2) \Psi = 0 \quad (5)$$

<sup>6</sup> D. BOHM, Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields, (herausgeg. von A. GUTHRIE u. R. K. WAKERLING), McGraw-Hill, New York 1949, Kap. 2 und 3.

<sup>7</sup> T. H. STIX, The Theory of Plasma Waves, McGraw-Hill, New York 1962.

<sup>8</sup> B. WIEDER, Phys. Fluids 7, 964 [1964].



gerade vier linear unabhängige Lösungen, deren Linearkombination die allgemeine Lösung von Gl. (3) bzw. (2) darstellt. Es gilt also

$$E_z = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (6)$$

Wird nun  $E_z$  in Gl. (2) eingesetzt, so folgt

$$B_z = g_1 \Psi_1 + g_2 \Psi_2 \quad (7)$$

mit

$$g_{1,2} = (S_{1,2}^2 - A)/B = (C - S_{2,1}^2)/B.$$

Führen wir in der transversalen Ebene Polarkoordinaten ein, dann hat Gl. (5) die Form

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + S_{1,2}^2 \right) \Psi = 0. \quad (8)$$

Diese Gleichung wird für  $S_{1,2} \neq 0$  gelöst durch

$$\Psi_{1,2} = [A_{1,2} J_n(S_{1,2} \varrho) + B_{1,2} Y_n(S_{1,2} \varrho)] e^{in\varphi}, \quad (9)$$

wobei  $J_n$  und  $Y_n$  die BESSEL-Funktionen 1. und 2. Art sind (mit  $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Die Lösungen für  $S_{1,2} = 0$  brauchen wir nicht aufzuschreiben, denn durch Einsetzen der Gl. (6) und (7) in die MAXWELL-Gleichungen ergeben sich die übrigen Komponenten von  $E$  und  $B$  ebenfalls nur unter der Bedingung  $S_{1,2} \neq 0$ <sup>2,3</sup>. Zur Erfüllung der Randbedingungen benötigen wir nur die  $\varphi$ -Komponenten

$$\begin{aligned} E_\varphi &= (i g_1/S_1) \Psi_1' + (i g_2/S_2) \Psi_2', \\ B_\varphi &= -i \varepsilon_3 (\Psi_1'/S_1 + \Psi_2'/S_2), \end{aligned} \quad (10)$$

---


$$\begin{aligned} &J_0(S_1 a) A_1 + J_0(S_2 a) A_2 - J_0(S_0 a) B_1 - J_0(S_0 a) B_2 = 0, \\ &g_1 J_0(S_1 a) A_1 + g_2 J_0(S_2 a) A_2 - J_0(S_0 a) C_1 - J_0(S_0 a) C_2 = 0, \\ &-(i g_1/S_1) J_1(S_1 a) A_1 - (i g_2/S_2) J_1(S_2 a) A_2 + (i/S_0) J_1(S_0 a) C_1 + (i/S_0) Y_1(S_0 a) C_2 = 0, \\ &(i \varepsilon_3/S_1) J_1(S_1 a) A_1 + (i \varepsilon_3/S_2) J_1(S_2 a) A_2 - (i/S_0) J_1(S_0 a) B_1 - (i/S_0) Y_1(S_0 a) B_2 = 0, \end{aligned}$$


---

$$J_0(S_0 b) B_1 + Y_0(S_0 b) B_2 = 0,$$

$$J_0(S_0 b) C_1 + Y_0(S_0 b) C_2 = 0.$$

Dies ist ein homogenes Gleichungssystem 6. Ordnung zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten  $A_1 \dots C_2$ . Es hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante

$$\begin{aligned} \text{Det} &= (S_1^2 - A) (D_1 \varepsilon_3 J_1(S_2 a)/S_2 - D_2 J_0(S_2 a)/S_0) \\ &\quad \cdot (D_3 J_1(S_1 a)/S_1 - D_4 J_0(S_1 a)/S_0) \\ &\quad - (S_2^2 - A) (D_1 \varepsilon_3 J_1(S_1 a)/S_1 - D_2 J_0(S_1 a)/S_0) \\ &\quad \cdot (D_3 J_1(S_2 a)/S_2 - D_4 J_0(S_2 a)/S_0) \end{aligned} \quad (14)$$

wobei ' die Ableitung nach dem Argument bedeutet. Weil für  $\varrho = 0$  alle Feldkomponenten endlich bleiben müssen, können nur BESSEL-Funktionen 1. Art vorkommen. Mit  $J_0' = -J_1$  folgt schließlich

$$\begin{aligned} E_z &= J_0(S_1 \varrho) \cdot A_1 + J_0(S_2 \varrho) \cdot A_2, \\ B_z &= g_1 J_0(S_1 \varrho) \cdot A_1 + g_2 J_0(S_2 \varrho) \cdot A_2, \\ E_\varphi &= -(i g_1/S_1) J_1(S_1 \varrho) \cdot A_1 - (i g_2/S_2) J_1(S_2 \varrho) \cdot A_2, \\ B_\varphi &= (i \varepsilon_3/S_1) J_1(S_1 \varrho) \cdot A_1 + (i \varepsilon_3/S_2) J_1(S_2 \varrho) \cdot A_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Im Vakuum ist

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon_2 = 0, \\ A = C = (1 - N^2), \quad B = D = 0. \end{aligned}$$

Gl. (2) ist also entkoppelt, und es gilt

$$(\nabla_t^2 + S_0^2) \Psi = 0, \quad (12)$$

mit

$$S_0^2 = 1 - N^2.$$

Damit folgt analog oben

$$\begin{aligned} E_z &= J_0(S_0 \varrho) \cdot B_1 + Y_0(S_0 \varrho) \cdot B_2, \\ B_z &= J_0(S_0 \varrho) \cdot C_1 + Y_0(S_0 \varrho) \cdot C_2, \\ E_\varphi &= -(i/S_0) J_1(S_0 \varrho) \cdot C_1 - (i/S_0) Y_1(S_0 \varrho) \cdot C_2, \\ B_\varphi &= -(i/S_0) J_1(S_0 \varrho) \cdot B_1 + (i/S_0) Y_1(S_0 \varrho) \cdot B_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Wird der Radius des Plasmazyinders mit  $a$  und der Radius der Metallwand mit  $b$  bezeichnet, dann lauten die Randbedingungen

verschwindet. — Bei vorgegebenen  $n_e$ ,  $\omega$  und  $B_0$  ist die Bedingung  $\text{Det} = 0$  eine transzendente Bestimmungsgleichung für  $N$ , d. h. die gesuchte Dispersionsgleichung.

Dabei bedeutet

$$\begin{aligned} D_1 &= J_0(S_0 b) Y_0(S_0 a) - Y_0(S_0 b) J_0(S_0 a), \\ D_2 &= J_0(S_0 b) Y_1(S_0 a) - Y_0(S_0 b) J_1(S_0 a), \\ D_3 &= J_1(S_0 b) Y_0(S_0 a) - Y_1(S_0 b) J_0(S_0 a), \\ D_4 &= J_1(S_0 b) Y_1(S_0 a) - Y_1(S_0 b) J_1(S_0 a). \end{aligned}$$

Ist der Metallzylinder vollständig mit Plasma gefüllt ( $a = b$ ), dann reduziert sich Gl. (14) auf

$$\begin{aligned} \text{Det} &= (S_1^2 - A) S_2 J_0(S_2 a) J_1(S_1 a) \\ &\quad - (S_2^2 - A) S_1 J_0(S_1 a) J_1(S_2 a). \end{aligned} \quad (15)$$

#### 4. Vergleich zwischen Theorie und Experiment

Die numerische Auswertung der Dispersionsbeziehung ist praktisch nur mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine möglich. Dabei werden die  $N$ -Werte vorgegeben und aus Gl. (4)  $S_{1,2}$  und damit aus Gl. (14)  $\text{Det}$  berechnet. Durch Variation von  $N$  in sehr kleinen Schritten werden so systematisch alle Nullstellen von Gl. (14) im interessierenden Parameter- und  $N$ -Bereich aufgesucht. Dabei sind aber nur solche  $N$ -Werte zugelassen, die weder  $S=0$  noch  $S_1=S_2$  zur Folge haben, weil ja sonst Gl. (14) nicht gültig ist.

Da wir  $\omega < \omega_g$ ,  $\omega < \omega_p$  und  $N$  reell vorausgesetzt haben, kann nur dann ein  $S$  verschwinden, wenn  $v=0$  bzw. wenn

$$N^2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

ist, d. h. wenn  $N$  gerade die bekannte Dispersionsbeziehung der whistler-mode (ebener Fall) erfüllt. – Beide  $S$  werden gleich, wenn

$$N^2 = \varepsilon_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 - \varepsilon_2^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \pm 2 \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3 [\varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2]} / (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2$$

ist.

Der Verlauf dieser „verbotenen“ Werte ist in Abb. 3 dargestellt. Die ausgezogene Kurve ( $v=0$ ) und die gestrichelte Kurve ( $S_1=S_2$ ) berühren sich für

$$\omega_g/\omega = 2(\omega_p^2 - \omega^2)/(\omega_p^2 - 2\omega^2).$$

Diese Kurven begrenzen gleichzeitig jene Bereiche, in denen reelle, imaginäre oder komplexe  $S$  vorkommen, d. h. in denen die dazu gehörigen BESSEL-Funktionen oszillatorisch, monoton oder komplex sind. –

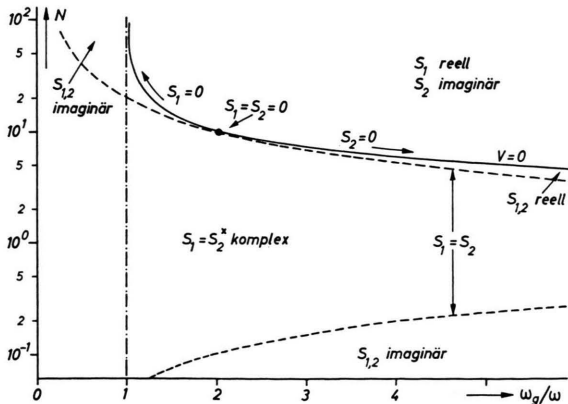


Abb. 3. Grenzkurven der verschiedenen Lösungstypen für ( $\omega_p/\omega=10$ ).

Mit wachsendem  $\omega_p/\omega$  rücken diese Grenzkurven weiter auseinander und umgekehrt.

Um mit unseren Messungen vergleichen zu können, wurde  $a=0,6$  cm,  $b=11$  cm und  $\omega/2\pi=3$  GHz gesetzt. Die Elektronendichte wurde als Parameter zwischen  $10^{13}$  und  $10^{14}/\text{cm}^3$  variiert. Dann wurde Gl. (14) in der oben beschriebenen Weise in Abhängigkeit vom Magnetfeld ausgewertet. Das Ergebnis für  $n_e=10^{14}/\text{cm}^3$  ist in Abb. 4 dargestellt.

Oberhalb der dick ausgezogenen Kurve, im Bereich I, existieren sehr viele verschiedene Wellentypen, die sich durch die Zahl ihrer Knoten in radialer Richtung unterscheiden. Ihre Dispersionskurven laufen „parallel“ zu dieser Grenzkurve. Sie liegen so dicht, daß sie nicht getrennt gezeichnet, sondern nur symbolisch angedeutet werden können. – Von der Gyroresonanz ( $\omega_g/\omega=1$ ) kommend ist die Grenzkurve zunächst mit der Kurve ( $v=0$ ) aus Abb. 3 identisch. Vom Berührungspunkt ( $S_1=S_2=0$ ) ab deckt sie sich aber mit der Kurve ( $S_1=S_2$ ).

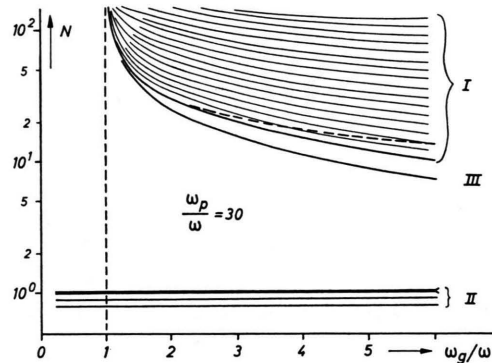


Abb. 4. Dispersionskurven rotationssymmetrischer Wellen.

Die Kurve ( $v=0$ ) ist gestrichelt weitergeführt. Das Gebiet I deckt sich also gerade mit jenem Parameterbereich, in dem die Lösungen oszillatorische Anteile enthalten. Dadurch wird das Auftreten vieler verschiedener Wellentypen verständlich.

Abgesehen davon, daß unsere gemessenen Dispersionskurven wesentlich unterhalb des Gebietes I liegen, ist es schwer vorstellbar, daß der Ringkopppler von den vielen möglichen Wellentypen, die sich in ihrer Phasengeschwindigkeit kaum unterscheiden, eine einzelne anregen sollte, wie das durch unsere Meßergebnisse offenbar gezeigt wird.

Außerdem wurden noch vier weitere Wellen gefunden, die in Abb. 4 mit II bezeichnet sind. Ihre Ausbreitungskonstante unterscheidet sich kaum von Eins und ist praktisch unabhängig vom Magnetfeld.

Sie kommen deshalb für die Erklärung unserer Messungen ebenfalls nicht in Frage. — Ihre Ausbreitungskonstante ist auch unabhängig von der Meßfrequenz, wie WIEDER zeigen konnte, der sich im Gegensatz zu uns nur für die Frequenzabhängigkeit interessierte. Er konnte mit diesen Wellen gewisse Erscheinungen an ZETA qualitativ erklären<sup>2</sup>.

Änderungen der Radien  $a$  und  $b$  sowie der Elektronendichte verändern lediglich die Dichte der Dispersionskurven im Gebiet I. Erst wenn  $a = b$  gesetzt wird, d. h. wenn das Plasma den Metallzylinder vollständig erfüllt, ergeben sich grundsätzliche Veränderungen. Zwar existiert dann nach wie vor das Gebiet I mit den gleichen Eigenschaften, aber die vier nichtdispersiven Wellen verschwinden und an ihre Stelle tritt eine stark dispersive Welle (Mode III), deren Dispersionskurve in einem deutlichen Abstand unterhalb des Gebietes I liegt. Ihre Ausbreitungskonstante hängt nur sehr schwach vom Radius ab und liegt in der Größenordnung unserer Meßwerte. Es gilt deshalb zu prüfen, ob nicht mit diesem Wellentyp unsere Messungen erklärt werden können. Denn die Einführung komplizierter Dichteprofile würde das Rechenprogramm sehr viel umfangreicher und unübersichtlicher gestalten.

Zunächst ist aber nicht zu sehen, welche Rolle die Mode III bei unseren Messungen spielen sollte. Denn unseren Vorstellungen liegt ja die Auffassung zugrunde, daß sich die Wellen in und an einem homogenen Plasmazylinder umgeben von Vakuum ausbreiten. Beachtet man aber, daß unsere Messungen nur in unmittelbarer Umgebung des Kopplers ausgeführt werden können, so ist es denkbar, daß die nachgewiesenen Wellen allein durch die Randbedingungen am Ort der Anregung bestimmt sind und die Messungen gewissermaßen im Streufeld des Koppelsystems ausgeführt werden. Dafür spricht die Tatsache, daß mit wachsendem Abstand vom Koppler die Signale „diffus“ werden und die Phasengeschwindigkeit leicht abnimmt. Da das Kopplergehäuse den Bogen relativ eng umschließt (Abb. 2), ist am Ort der Anregung ein mit Plasma gefüllter Metallzylinder sicher ein besseres Modell des Bogens, als ein von Vakuum umgebener Plasmazylinder.

Um diese Hypothese zu prüfen, wurde für  $a$  der innere Radius des Kopplers eingesetzt und die Dispersionskurven der Mode III aus Gl. (15) berechnet. Die Ergebnisse werden in Abb. 5 mit den Meßkurven verglichen. Die Übereinstimmung ist überraschend gut, gemessen an den theoretischen Verein-

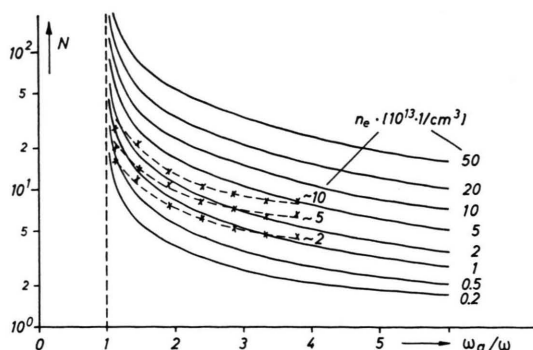


Abb. 5. Dispersionskurven der Mode III, berechnet (—) und gemessen mit Ringkoppler (1. Ausführung) - - -.

fachungen und der Unsicherheit der Elektronendichtebestimmung. Ein weiteres Argument für diese Vermutung ist das bereits erwähnte Auftreten von Interferenzen in der Umgebung der Gyroresonanz. Diese treten ja gerade bei solchen Parameterwerten auf, bei denen die Mode III dem Gebiet I eng benachbart ist, so daß der Unterschied zwischen den Wellenlängen sehr klein ist, und somit eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß außer der Mode III auch noch eine oder mehrere Wellen aus dem Gebiet I mit angeregt werden. Dieses Argument wird unterstützt durch die Beobachtung, daß die Interferenzen bei einem um so größeren Magnetfeld — d. h. bei einem um so größeren Wellenlängenunterschied — einsetzen, je kleiner der Koppelspalt ist, d. h. je später die Anregungswahrscheinlichkeit für kurze Wellenlängen abzunehmen beginnt. (Die Breite des Koppelspaltes ist ja so etwas wie ein Maß für die kleinste anregbare Wellenlänge.)

Bei den Rechnungen ist der mit Plasma gefüllte Metallzylinder als unendlich lang vorausgesetzt, d. h. die Ausdehnung des Kopplers in  $z$ -Richtung sollte

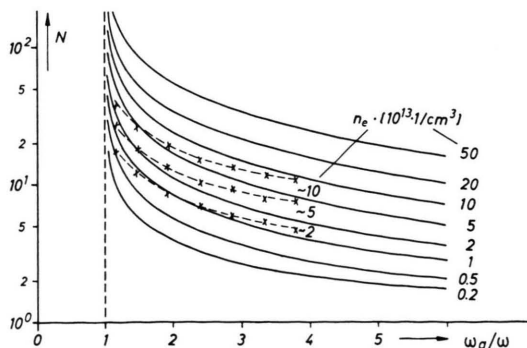


Abb. 6. Dispersionskurven der Mode III, berechnet (—) und gemessen mit Ringkoppler (2. Ausführung) - - -.

groß sein gegen die angeregten Wellenlängen. Um dieser Forderung besser gerecht zu werden, wurde das Kopplergehäuse so abgeändert, daß es den Bogen enger, gleichmäßiger und über eine doppelt so große Länge als bisher umschloß. Unter diesen Bedingungen wurden alle Messungen wiederholt. Die neuen Meßwerte lagen durchwegs über den alten, so daß eine bessere Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den gerechneten Dispersionskurven vorliegt (Abb. 6). — Die etwas schlechtere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment in der Nähe der Gyroresonanz liegt vermutlich an dem allmählichen Einsetzen der Interferenzen und an dem dort größeren Einfluß der Stöße und der Elektronentemperatur<sup>1</sup>.

Die Gesamtheit der angeführten Argumente macht es also ziemlich sicher, daß in unserem Experiment die Mode III angeregt und nachgewiesen wurde, d. h. daß die angeregten Wellen durch die Randbedingungen am Ankoppelsystem bestimmt sind und nicht durch den Rand des gesamten Entladungsgefäßes, wie ursprünglich erwartet worden war.

Ich danke Herrn Privatdozent Dr. E. W. BLAUTH für sein Interesse an dieser Arbeit und für die Annahme als Dissertation. Herrn Dr. v. GIERKE danke ich für die Aufnahme in seine Abteilung, und für die Möglichkeit, diese Arbeit durchführen zu dürfen. — Mein besonderer Dank gilt Herrn H. STÖCKERMANN für seine tatkräftige Hilfe bei der Konstruktion und dem Aufbau der Apparatur sowie bei der Durchführung der Messungen und den Herren M. TUTTER und B. O'BRIEN für wertvolle Diskussionen und Hinweise.

## Untersuchung des Druckaufbaus einer stationären, magnetfeldstabilisierten Helium-Entladung mit Hilfe magnetischer Messungen \*

OTTO KLÜBER

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforschg. 22 a, 1599—1612 [1967]; eingegangen am 6. Juni 1967)

A stationary discharge is produced by a current flowing parallel to the magnetic field of a cylindrical coil. In the region where the field is homogeneous the pressure in the plasma column is much higher than that in the surrounding neutral gas. This is mainly caused by diamagnetic ring currents, as is shown by measuring the magnetic flux due to these currents. Two effects are primarily responsible for the ring currents in this region: The already known effect of the ambipolar diffusion across the magnetic field and a thermomagnetic effect, called NERNST effect, whose influence on the pressure build-up of a plasma has not been investigated hitherto. Other phenomena causing ring currents occur in the plasma near the coil ends and outside the field coil.

Die in herkömmlichen stationären Lichtbögen erreichbaren Achsentemperaturen werden meistens durch die mit steigender Temperatur stark wachsenden Wärmeleitungsverluste begrenzt. Es liegt deswegen nahe, einem solchen Bogen ein achsenparalleles Magnetfeld zu überlagern, um die Wärmeleitfähigkeit des Plasmas in radialer Richtung stark zu reduzieren und so die Achsentemperatur wesentlich zu steigern. Eine Anordnung, mit der sich das erreichen ließ, wurde von WULFF<sup>1</sup> entwickelt. Sie besteht aus einem etwa 70 cm langen zylindrischen Entladungsrohr von 7 cm Durchmesser, das sich in einer zylindrischen Magnetfeldspule von ungefähr

gleicher Länge befindet. An dieses Rohr sind an beiden Seiten Quarztrichter mit ringförmigen Elektroden angesetzt, zwischen denen für etwa 1 msec ein stationärer Bogen mit einer Stromstärke von einigen kA gezündet wird. Das durch die Spule erzeugte Magnetfeld ist während der Entladungsdauer ebenfalls konstant. Im Inneren der Feldspule wird so eine zylindrische Plasmaläule von etwa 1 cm Radius erzeugt. Als Füllgas wird Helium verwendet. Aus dem experimentellen Befund, daß die Linienstrahlung in der Umgebung der Achse völlig ausgestorben ist, ergibt sich, daß die Achsentemperatur erheblich über  $10^5$  °K liegen muß. Die bisherigen Unter-

\* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Hochschule München genehmigten Dissertation über „Untersuchung des Druckaufbaus einer stationären, magnetfeldstabilisierten He-

lium-Entladung mit Hilfe magnetischer Messungen“ des Dipl.-Phys. OTTO KLÜBER.

<sup>1</sup> H. WULFF, Proc. 7th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Vol. I, p. 829, Belgrade 1965.